FIBRATIONS ET CONJECTURE DE TATE

MARC HINDRY, AMÍLCAR PACHECO ET RANIA WAZIR

Résumé. Nous décrivons le comportement du rang du groupe de Mordell-Weil de la variété de Picard de la fibre générique d'une fibration en termes de contributions locales données par des moyennes de traces de Frobenius agissant sur les fibres. Les énoncés fournissent une réinterpretation de la conjecture de Tate (pour les diviseurs) et généralisent des résultats antérieurs de Nagao, Rosen-Silverman et des auteurs.

Abstract. **Fibrations and Tate's conjecture.** We describe the behaviour of the rank of the Mordell-Weil group of the Picard variety of the generic fibre of a fibration in terms of local contributions given by averaging traces of Frobenius acting on the fibres. The results give a reinterpretation of Tate's conjecture (for divisors) and generalises previous results of Nagao, Rosen-Silverman and the authors.

1. Introduction et discussion.

Nous appellerons une *fibration* un morphisme $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ propre et plat et dont la fibre générique est géométriquement irréductible, entre deux variétés algébriques, lisses et projectives; on supposera de plus que f, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont définis sur un corps de nombres k. Par convention les variétés soient connexes dans cet article. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $G_k:=\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ son groupe de Galois absolu. On notera $n:=\dim\mathcal{X}$ et $m:=\dim\mathcal{Y}$. Ainsi toutes les fibres $\mathcal{X}_y:=f^{-1}(y)$ sont de dimension $d:=n-m$ et, pour y hors d'un diviseur Δ de $\mathcal{Y}$, on sait que $\mathcal{X}_y$ est irréductible et lisse. Si nous avons besoin de fixer la dimension relative d de f, on appellera cette fibration une *d-fibration.* En particulier la fibre générique, notée X, est une variété projective lisse de dimension d, définie sur le corps de fonctions $K:=k(\mathcal{Y})$. Pour une variété lisse $\mathcal{X}$, on notera $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ (resp. $\mathrm{NS}(\mathcal{X})$) le groupe de Picard (resp. de Néron-Severi) des $\bar{k}$-diviseurs modulo équivalence rationnelle (resp. modulo équivalence algébrique); le sous-groupe des classes de diviseurs définis sur k sera noté $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}/k)$ (resp. $\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)$). Nous noterons $P_X:=\mathrm{Pic}^0(X)$ la variété de Picard de X et (τ,B) sa K/k-trace; c'est-à-dire que tout K-morphisme ϕ d'une variété abélienne A, définie sur k, vers P_X se factorise en $\phi=\tau\circ\phi'$ (voir [12]).

Les Théorèmes de Mordell-Weil et Severi, étendus par Lang et Néron, permettent d'affirmer que les groupes $B(k)$, $\mathrm{NS}(\mathcal{X})$, $\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)$, $\mathrm{NS}(\mathcal{Y})$, $\mathrm{NS}(\mathcal{Y}/k)$, $\mathrm{NS}(X)$, $\mathrm{NS}(X/K)$, $P_X(\bar{k}(\mathcal{Y}))/\tau B(\bar{k})$ et $P_X(k(\mathcal{Y}))/\tau B(k)$ sont des groupes de type fini (voir [11]).

Date: 1 février 2004.

Amílcar Pacheco a été partiellement soutenu par les bourses de recherche CNPq 300896/91-3, CNPq Edital Universal 470099/2003-8, et par le projet PRONEX 41.96.0830.00. Rania Wazir a été partiellement soutenue par le projet EAGER (contract number HPRN-CT-2000-00099) et par le GNSAGA de l'INDAM. Ce travail a été commencé pendant une visite du deuxième auteur au premier auteur à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, dans le cadre de l'accord Brésil-France 69.0014/01-5, les deux auteurs remercient cet accord pour son soutien financier et aussi l'Institut pour sa chaleureuse ambiance scientifique.

Nous allons étudier des interprétations (en bonne partie conjecturales) des *rangs* de ces groupes en termes d'invariants locaux associés à f que nous passons maintenant à définir.

Soit $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers du corps de nombres k et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_k$, on note $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ son corps résiduel et $q_\mathfrak{p} := \#\mathbb{F}_\mathfrak{p}$. Pour une variété lisse $\mathcal{Z}/k$ on notera $\tilde{\mathcal{Z}}_\mathfrak{p}/\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ sa réduction modulo $\mathfrak{p}$ (dans cette définition et dans tout ce qui suit on s'autorise à éliminer un ensemble fini - qu'on notera R - de "mauvais" idéaux premiers, qui peut être élargi dès que nécessaire). On notera $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \in G_k$ un automorphisme de Frobenius associé à $\mathfrak{p}$, agissant sur $\mathcal{Z} \times_k \overline{k}$ à travers $\overline{k}$, et $I_\mathfrak{p} \subset G_k$ le groupe d'inertie associé à $\mathfrak{p}$ (défini à conjugaison près).

Pour alléger les notations, on notera

$$H^i(\mathcal{Z}) := H^i_{\text{ét}}(\mathcal{Z} \times_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)$$

les espaces de cohomologie ℓ-adique associés sur lesquels G_k agit, en particulier, $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ agit sur $H^i(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}}$, i.e., l'espace invariant par l'action de $I_\mathfrak{p}$, (en toute rigueur on devrait noter ces espaces $H^i_\ell(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}}$, mais ils n'interviendront qu'à travers le polynôme caractéristique de $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ et celui-ci est indépendant de ℓ, au moins pour $\mathfrak{p}$ hors d'un ensemble fini d'idéaux de $\mathcal{O}_k$). Dans tout cet article nous noterons :

$$a_\mathfrak{p}(\mathcal{Z}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \mid H^1(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}}) \text{ et } b_\mathfrak{p}(\mathcal{Z}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \mid H^2(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}}).$$

Il est classique de définir les fonctions L associées à $\mathcal{Z}/k$, que nous ne considérerons que pour $i = 1, 2$, par:

$$L_i(\mathcal{Z}/k, s) = \prod_\mathfrak{p} \det(1 - q_\mathfrak{p}^{-s}\,\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \mid H^i(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}})^{-1} \tag{1.1}$$

Ce produit et la série de Dirichlet associée sont convergentes pour $\Re(s) > 1 + i/2$.

On note dans ce texte par $F_\mathfrak{p}$ le générateur topologique de $G_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_\mathfrak{p}/\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ qu'on appelle le Frobenius en caractéristique p. Notons aussi $H^i(\tilde{\mathcal{Z}}_\mathfrak{p}) := H^i_{\text{ét}}(\tilde{\mathcal{Z}}_\mathfrak{p} \times_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \overline{\mathbb{F}}_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell)$. Observons que les théorèmes de spécialisation (ou changement de base) en cohomologie étale (voir [14] et [8, Appendix C]) permettent d'identifier le polynôme caractéristique de $F_\mathfrak{p}$ agissant sur $H^i(\tilde{\mathcal{Z}}_\mathfrak{p})$ et celui de $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ agissant sur $H^i(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}}$; en particulier $\mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p}|H^i(\tilde{\mathcal{Z}}_\mathfrak{p})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}|H^i(\mathcal{Z})^{I_\mathfrak{p}})$.

Quitte à élargir R, si nécessaire, on peut supposer que la réduction $\tilde{f}_\mathfrak{p} : \tilde{\mathcal{X}}_\mathfrak{p} \to \tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}$ de $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ soit aussi une fibration en variétés lisses définie sur $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$. Soit $\Delta := \{y \in \mathcal{Y} \mid \mathcal{X}_y = f^{-1}(y) \text{ est singulier}\}$ le lieu discriminant de f. En rajoutant un nombre fini d'idéaux à R, on peut supposer que la réduction $\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}$ de Δ modulo $\mathfrak{p}$ coïncide avec le lieu discriminant de $\tilde{f}_\mathfrak{p}$.

Pour tout $y \in (\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p} - \tilde{\Delta}_\mathfrak{p})(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$, soit $a_\mathfrak{p}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},y}) := \mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p} \mid H^1(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}))$ et $b_\mathfrak{p}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},y}) := \mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p} \mid H^2(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}))$. Si $y \in \tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$, on doit remplacer les groupes de cohomologie étale $H^i(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$ par les groupes de cohomologie ℓ-adique à support propre $H^i_c(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) := H^i_c(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y} \times_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \overline{\mathbb{F}}_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell)$, i.e., $a_\mathfrak{p}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},y}) := \mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p} \mid H^1_c(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}))$ et $b_\mathfrak{p}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},y}) := \mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p} \mid H^2_c(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}))$.

Nous introduisons les *traces moyennes de Frobenius* définies par

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{p}(\mathcal{X}) = \frac{1}{q_\mathfrak{p}^m} \sum_{y \in \tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} a_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) \text{ et } \mathfrak{B}_\mathfrak{p}(\mathcal{X}) = \frac{1}{q_\mathfrak{p}^m} \sum_{y \in \tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} b_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}).$$

On définit également comme dans [9] la *trace moyenne de Frobenius réduite* par

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) = \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) - a_{\mathfrak{p}}(B).$$

Avant d'énoncer le théorème principal de ce texte, rappelons le contenu de la Conjecture de Tate (pour les diviseurs).

Conjecture T (Conjecture de Tate)**.** [24, Conjecture 2] *La fonction* $L_2(\mathcal{X}/k, s)$ *a un pôle en* $s = 2$ *d'ordre* $\mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k))$.

Remarque 1.1. On peut préciser l'énoncé comme suit.

(1) Il s'agit d'une version de la conjecture de Tate, la conjecture générale concerne tous les cycles algébriques.
(2) On peut se dispenser de l'hypothèse d'un prolongement méromorphe au voisinage de $s = 2$ en interprétant la phrase "$L_2(\mathcal{X}/k, s)$ possède un pôle d'ordre t en $s = 2$" comme signifiant

$$\lim_{\Re(s)>2, s\to 2} (s-2)^t L_2(\mathcal{X}/k, s) = \alpha \neq 0.$$

De même, si $f(s)$ est holomorphe sur $\Re(s) > \lambda$ et si $\lim_{s\to\lambda}(s-\lambda)f(s) = \alpha \neq 0$, on appellera α le *résidu* de la fonction $f(s)$ en $s = \lambda$ et on écrira $\mathrm{Rés}_{s=\lambda} f(s) = \alpha$.

Conjecture $\mathbf{M_{an}}$. *Avec les notations précedentes. La fonction*

$$\sum_{\mathfrak{p}\notin R} -\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) \frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s} + \sum_{\mathfrak{p}\not| R} \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) \frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^{s+1}}, \tag{1.2}$$

qui est a priori analytique sur $\Re(s) > 1$*, a un pôle simple en* $s = 1$*, avec résidu égal à:*

$$\mathrm{rang}\left(\frac{P_X(K)}{\tau B(k)}\right) + \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(X/K)). \tag{1.3}$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème principal qui est une conséquence d'un résultat inconditionnel de calcul de résidus (cf. §4, Théorème 4.1).

Théorème 1.2. *Soit* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *une fibration en variétés projectives lisses, définies sur un corps de nombres* k*. Deux des trois affirmations suivantes impliquent la troisième:*

(1) *La Conjecture T est vraie pour* $\mathcal{X}/k$*.*
(2) *La Conjecture T est vraie pour* $\mathcal{Y}/k$*.*
(3) *La Conjecture* M_{an} *est vraie pour* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$*.*

En fait, conjecturalement chacune des deux fonctions définies par les sommes dans (1.2) devrait se prolonger avec un résidu en $s = 1$ égal au terme correspondant dans (1.3). Pour mettre en perspective l'énoncé précédent il convient de rappeler la Conjecture Analytique de Nagao Généralisée (ainsi que son analogue arithmétique, la Conjecture Taubérienne de Nagao Généralisée) et formuler un analogue de la Conjecture T pour les fibrations en variétés définies sur un corps de nombres k.

Conjecture $\mathbf{N_{an}}$ (Conjecture Analytique de Nagao Généralisée)**.**

$$\mathop{\mathrm{Rés}}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R} -\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) \frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s}\right) = \mathrm{rang}\left(\frac{P_X(K)}{\tau B(k)}\right). \tag{1.4}$$

Conjecture $\mathbf{N_{tb}}$ (Conjecture Taubérienne de Nagao Généralisée)**.**

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{\substack{\mathfrak{p}\notin R\\ q_\mathfrak{p}\le T}} -\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^*(\mathcal{X})\log(q_\mathfrak{p})\right) = \mathrm{rang}\left(\frac{P_X(K)}{\tau B(k)}\right). \tag{1.5}$$

Conjecture $\mathbf{T_{fin}}$ (Analogue de la Conjecture T pour les fibrations en variétés)**.**

$$\operatorname*{Rés}_{s=2}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R}\mathfrak{B}_\mathfrak{p}(\mathcal{X})\frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s}\right) = \mathrm{rang}\left(\mathrm{NS}(X/K)\right).$$

On peut bien sûr formuler une version *taubérienne* de cette conjecture, dénotée par Conjecture $\mathrm{T_{fin,tb}}$.

Corollaire 1.3 (du Théorème 1.2)**.** *Trois des affirmations suivantes impliquent la quatrième*

(1) *La Conjecture T est vraie pour $\mathcal{X}/k$.*
(2) *La Conjecture T est vraie pour $\mathcal{Y}/k$.*
(3) *La Conjecture T_{fin} est vraie pour $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$*
(4) *La Conjecture N_{an} est vraie pour $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$.*

Remarque 1.4. (1) On voit tout de suite que la Conjecture $\mathrm{M_{an}}$ se réduit à la Conjecture $\mathrm{N_{an}}$ dans le cas de fibrations en courbes, puisque la Conjecture $\mathrm{T_{fin}}$ est trivialement vraie. En effet, dans ce cas-là on a $\dim X = 1$, donc $\mathrm{NS}(X)\cong\mathbb{Z}$. De plus, pour tout $y\in(\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}-\tilde{\Delta}_\mathfrak{p})(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ on a $b_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) = q_\mathfrak{p}$, alors que $b_p(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) = O(q_\mathfrak{p})$ pour $y\in\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$. Donc $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}(\mathcal{X})$ se décompose en somme de deux termes:

$$q_\mathfrak{p}^m\mathfrak{B}_\mathfrak{p}(\mathcal{X}) := \sum_{y\in\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} b_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) = q_\mathfrak{p}\#(\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})) + \sum_{y\in\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})}(b_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) - q_\mathfrak{p})$$

où (cf. Lemme 3.2) le premier terme est $q_\mathfrak{p}\left(q_\mathfrak{p}^{\dim(\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p})} + O\left(q_\mathfrak{p}^{\dim(\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p})-1/2}\right)\right)$ et le second terme est $O\left(q_\mathfrak{p}^{1+\dim(\tilde{\Delta}_\mathfrak{p})}\right)$. Il suit que $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}(\mathcal{X}) = q_\mathfrak{p} + O\left(q_\mathfrak{p}^{1/2}\right)$, et en particulier,

$$\operatorname*{Rés}_{s=2}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R}\mathfrak{B}_\mathfrak{p}(\mathcal{X})\frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s}\right) = 1.$$

(2) La Conjecture T pour $\mathcal{X}/k$ peut s'exprimer en disant que la dérivée logarithmique de la fonction $L_2(\mathcal{X}/k,s)$ possède un pôle simple en $s=2$ de résidu $-\mathrm{rang}\left(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)\right)$ ou encore (voir le paragraphe 4 pour le détail de ces calculs classiques) que :

$$\operatorname*{Rés}_{s=2}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R} b_\mathfrak{p}(\mathcal{X})\frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s}\right) = \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)). \tag{1.6}$$

(3) Ainsi, dans la plupart des cas où l'on sait démontrer l'existence d'un prolongement analytique de $L_2(\mathcal{X}/k,s)$ à la droite $\Re(s)=2$, on sait également démontrer que la fonction ne s'annule pas sur cette droite. Cette propriété est importante car elle permet d'appliquer un théorème Taubérien

[10, Chapter XV] à la dérivée logarithmique de $L_2(\mathcal{X}/k,s)$ et de conclure que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{\substack{\mathfrak{p}\notin R\\ q_\mathfrak{p}\leq T}} b_\mathfrak{p}(\mathcal{X})\frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}}\right)=\operatorname{rang}(\operatorname{NS}(\mathcal{X}/k)). \tag{1.7}$$

Si cette dernière égalité est vraie, nous dirons que la *Conjecture Taubérienne de Tate* est vérifiée, dénotée Conjecture T_{tb}.

(4) Sous l'hypothèse additionnelle que la Conjecture T_{tb} soit vraie pour $\mathcal{X}/k$ et $\mathcal{Y}/k$, et que la Conjecture $\mathrm{T}_{\mathrm{fin,tb}}$ soit vraie pour $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, on en conclut que la Conjecture N_{tb} est aussi vraie pour $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$.

Comme nous l'avons indiqué, la Conjecture $\mathrm{T}_{\mathrm{fin}}$ est vérifiée (et essentiellement triviale) dans le cas où X est une courbe; dans ce cas sa variété de Picard s'identifie à sa variété Jacobienne que nous dénotons par J_X. On obtient alors :

Corollaire 1.5. *Soit $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ une fibration en courbes. Supposons que la Conjecture T soit vraie pour $\mathcal{X}/k$ et $\mathcal{Y}/k$. Alors*

$$\operatorname*{R\acute{e}s}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R}-\mathfrak{A}^*_\mathfrak{p}(\mathcal{X})\frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s}\right)=\operatorname{rang}\left(\frac{J_X(K)}{\tau B(k)}\right). \tag{1.8}$$

Sous l'hypothèse additionnelle que les fonctions $L_2(\mathcal{X}/k,s)$ et $L_2(\mathcal{Y}/k,s)$ se prolongent sur la droite $\Re(s)=2$ sans zéros, on obtient également la version taubérienne suivante :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{\substack{\mathfrak{p}\notin R\\ q_\mathfrak{p}\leq T}}-\mathfrak{A}^*_\mathfrak{p}(\mathcal{X})\log(q_\mathfrak{p})\right)=\operatorname{rang}\left(\frac{J_X(K)}{\tau B(k)}\right). \tag{1.9}$$

Remarque 1.6. Si l 'on prend une variété abélienne "constante", disons B définie sur un corps de nombre k, le pendant de la formule (1.8) est

$$\operatorname*{R\acute{e}s}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R}-a_\mathfrak{p}(B)\frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s}\right)\overset{?}{=}\operatorname{rang}(B(k))$$

c'est-à-dire la Conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer pour B/k (voir par exemple Tate [25]). On peut expliciter cette analogie en associant à la variété X/K (ou plus précisément à la fibration $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$) les fonctions L suivantes :

$$\begin{aligned}L_i(X/K,s)=\prod_{\mathfrak{p}}\Bigg(&\prod_{y\in(\tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}-\tilde{\Delta}_\mathfrak{p})(\mathbb{F}_\mathfrak{p})}\det(1-F_\mathfrak{p}q_\mathfrak{p}^{-s}\mid H^i(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}))^{-1}\\ &\times\prod_{y\in\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})}\det(1-F_\mathfrak{p}q_\mathfrak{p}^{-s}\mid H^i_c(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}))^{-1}\Bigg),\end{aligned} \tag{1.10}$$

Un calcul simple montre alors que la formule analogue de Birch & Swinnerton-Dyer pour les fibrations en variétés:

$$\operatorname*{ord}_{s=m+1} L_1(X/K,s) \stackrel{?}{=} \operatorname{rang}(P_X(K))$$

est équivalente à la formule

$$\operatorname*{Rés}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R} -\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s}\right) \stackrel{?}{=} \operatorname{rang}(P_X(K)) \tag{1.11}$$

elle-même conséquence de la Conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer pour B/k et de la formule (1.5). On appelle la validité de la formule (1.11) la *Conjecture BSD*$_{\mathit{fin}}$ pour la fibration $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (cf. [24, Conjecture of B + SD]).

De même on peut aisément montrer que la Conjecture $\mathrm{T}_{\mathrm{fin}}$ pour une fibration $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ peut se reformuler en disant que

$$\operatorname*{ord}_{s=m+2}(L_2(X/K,s)) = \operatorname{rang}(\mathrm{NS}(X/K))$$

(cf. [24, Conjecture 2]). Avec ces notations, la Conjecture M_{an}, et donc la troisième affirmation du Théorème 1.2, se traduit en disant que

$$\operatorname*{ord}_{s=1}\left(\frac{L_1(X/K,m+s)}{L_1(B/k,s)L_2(X/K,m+1+s)}\right)$$

est égal à la quantité attendue :

$$\operatorname{rang}\left(\frac{P_X(K)}{\tau B(k)}\right) + \operatorname{rang}\left(\mathrm{NS}(X/K)\right).$$

Remarque 1.7. Il peut sembler plus naturel de définir

$$\mathfrak{A}'_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) = \frac{1}{\#\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})}\sum_{y\in\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$$

et $\mathfrak{A}'^{*}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) = \mathfrak{A}'_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) - a_{\mathfrak{p}}(B)$. En observant (cf. §3) que l'on dispose de l'estimation $\#\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = q_{\mathfrak{p}}^m + O(q_{\mathfrak{p}}^{m-1/2})$, on peut montrer, comme dans [9, Remarque 2.3] que cela ne modifierait pas les énoncés en vue.

Remarque 1.8. L'égalité (1.5) ou (1.9) est une généralisation de la *Conjecture Taubérienne de Nagao* [16, 17] qui concernait les fibrations en courbes elliptiques au dessus de la droite projective et $k = \mathbb{Q}$ (voir aussi [20, Nagao's Conjecture 1.1′]). L'égalité (1.4) ou (1.8) est une généralisation de la *Conjecture Analytique de Nagao* telle qu'elle a été formulée par Rosen et Silverman (cf. [20, Nagao's Conjecture 1.1]) dans le cas où $n = 2$ (donc la Conjecture T est trivialement vérifiée pour $\mathcal{Y}$), le genre arithmétique des fibres est égal à 1 et f admet une section. De plus, le schéma de leur preuve a servi de modèle pour les travaux ultérieurs des auteurs qui ont respectivement traité le cas d'une variété $\mathcal{X}$ de dimension 3 fibrée en courbes elliptiques au-dessus d'une surface [26, Theorem 1.1], d'une surface fibrée en courbes de genre quelconque [9, Théorème 1.3]. On peut également citer le travail de S. Wong [28, Theorem 5] qui a prouvé un analogue de [9, Théorème 1.3], sous les hypothèses additionnelles que $B = 0$, et les multiplicités des composantes des fibres singulières sont premières entre elles. Dans le cadre des surfaces elliptiques, Silverman [22, Theorem 6] calcule une borne supérieure pour $|\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})|$, qui dépend du degré du conducteur de X/K, du genre de C/k et d'un terme d'erreur $O(q_{\mathfrak{p}}^{-1/2})$.

Le texte est organisé comme suit. Le §2 contient les préliminaires géométriques aboutissant à la "Formule de Shioda-Tate" (Proposition 2.6) dans notre contexte; le §3 décrit l'estimation du nombre de points sur les corps finis de variétés lisses ou singulières, le point clef étant la Proposition 3.3; le §4 contient la preuve du théorème dont dérive immédiatement le Théorème 1.2. Dans le §5 on utilise un résultat géométrique (cf. Proposition 5.1) pour prouver l'équivalence entre la Conjecture T, la Conjecture M_{an} pour les fibrations en variétés et la Conjecture N_{an} pour les fibrations en courbes. Finalement, dans le §6 on exploite le rapport entre les Conjectures N_{an} et $\mathrm{T}_{\mathrm{fin}}$ pour les fibrations en variétés montrant qu'elles sont en effet équivalentes. On prouve aussi que la Conjecture $\mathrm{BSD}_{\mathrm{fin}}$ pour les fibrations en variétés implique la Conjecture $\mathrm{T}_{\mathrm{fin}}$ pour les fibrations en variétés.

2. Outils géométriques

Nous prouvons ici une formule (Proposition 2.6) analogue à celle de Shioda-Tate pour les surfaces elliptiques ayant une section généralisant [20], [26], [9]. Nous utilisons la théorie d'intersection et prenons comme référence Fulton [6] ou Hartshorne [8, Appendix A]. Un point délicat est de prouver que l'accouplement défini avant le Lemme 2.1 est défini négatif.

Soit $f^* : \mathrm{Div}(\mathcal{Y}) \to \mathrm{Div}(\mathcal{X})$ l'application pullback des diviseurs et $f^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ l'application déduite pour les classes. Soit $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X})$ le groupe de Chow des cycles de codimension i (donc $\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$). Un élément de $\mathrm{Pic}(\mathcal{Y})$ est *positif* (resp. *strictement positif*) s'il est la classe d'un diviseur effectif (resp. effectif non nul). Choisissons une section hyperplane de $\mathcal{X}$ et notons h sa classe dans $\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$. On définit un accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \times \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) & \to & \mathrm{CH}^2(\mathcal{X}) & \to & \mathrm{CH}^{n-m+1}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}) \\ (\xi, \zeta) & \mapsto & \xi.\zeta & \mapsto & \xi.\zeta.h^{n-m-1} & \mapsto & \langle \xi, \zeta \rangle := \\ & & & & & & f_*(\xi.\zeta.h^{n-m-1}) \end{array}$$

On dira qu'un diviseur de $\mathcal{X}$ est *vertical* si ses composantes sont contenues dans $f^{-1}(Z)$ pour Z un diviseur de $\mathcal{Y}$; en d'autres termes : un diviseur irréductible D de $\mathcal{X}$ est vertical si $f(D) \neq \mathcal{Y}$ et un diviseur est vertical s'il est somme de diviseurs verticaux irréductibles (bien entendu cette notion est relative à la fibration f). Un diviseur irréductible D de $\mathcal{X}$ sera dit *horizontal* si $f(D) = \mathcal{Y}$, un diviseur horizontal est une somme de tels diviseurs. Tout diviseur ou classe de diviseur (dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ ou $\mathrm{NS}(\mathcal{X})$) se décompose en somme d'un diviseur vertical et d'un autre horizontal, en particulier nous pouvons écrire (avec des notations évidentes) une décomposition de $\mathbb{Z}[G_k]$-modules

$$\mathrm{NS}(\mathcal{X}) = \mathrm{NS}_{\mathrm{hor}}(\mathcal{X}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathrm{ver}}(\mathcal{X}). \tag{2.1}$$

Pour le cas où les fibres de f sont des courbes de genre arithmétique égal à 1 et f admet une section, le résultat suivant est donné dans la thèse du troisième auteur, où l'accouplement défini précédemment est introduit [26, Proposition 2.2].

Lemme 2.1. *L'accouplement est négatif sur les diviseurs verticaux, i.e., si V est vertical, on a $\langle V, V \rangle \leq 0$. De plus $\langle V, V \rangle = 0$ si et seulement si il existe $D \in \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $V = f^*(D)$. En particulier, si V est vertical et numériquement (ou algébriquement) nul sur $\mathcal{X}$ alors il appartient à $f^*(\mathrm{Pic}(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q})$.*

Démonstration. On prouve en premier que $\langle V,V\rangle \le 0$. Écrivons $V=\sum_i V_i$ avec $V_i \subset f^{-1}(Z_i)$ et Z_i irréductible. Donc, $\langle V_i,V_j\rangle = 0$ pour $i\neq j$ et $\langle V,V\rangle = \sum_i \langle V_i,V_i\rangle$. Il suffit donc de prouver l'affirmation pour chaque V_i. Par conséquent on peut supposer que $V\subset f^{-1}(G)$ pour $G\in \mathrm{Div}(\mathcal{Y})$ irréductible. Décomposons $\mathcal{G}=f^*(G)=\sum n_i\gamma_i$ avec $n_i\ge 1$ pour chaque i, et γ_i irréductible dans $\mathcal{X}$. En plus, comme $V\subset f^{-1}(G)$, on obtient $V=\sum_i a_i\gamma_i$ qu'on reécrit comme $\sum_i \frac{a_i}{n_i}n_i\gamma_i$. Soit $V'=\sum_i(\frac{a_i}{n_i})^2 n_i\gamma_i$. Comme V' est vertical et $\mathcal{G}=f^*(G)$, on a $\langle V',\mathcal{G}\rangle = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} -2\langle V,V\rangle &= \langle V',\mathcal{G}\rangle - 2\langle V,V\rangle + \langle \mathcal{G},V'\rangle \\ &= \sum_{i,j}\left(\frac{a_i}{n_i}-\frac{a_j}{n_j}\right)^2 \langle n_i\gamma_i, n_j\gamma_j\rangle \end{aligned}$$

et a fortiori

$$\langle V,V\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{a_i}{n_i}-\frac{a_j}{n_j}\right)^2 \langle n_i\gamma_i, n_j\gamma_j\rangle .$$

Par la définition de l'intersection avec un diviseur [6, Chapter 2, 2.3, p. 33] $\gamma_i.\gamma_j\ge 0$ pour $i\neq j$ et donc, comme h est la classe d'un diviseur très ample $\gamma_i.\gamma_j.h^{n-m-1}\ge 0$ (cf. [6, Lemma 12.1, p. 211]). Par la définition de l'image directe on obtient $\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle\ge 0$ pour $i\neq j$. On en déduit $\langle n_i\gamma_i,n_j\gamma_j\rangle\ge 0$, d'où $\langle V,V\rangle\le 0$.

Supposons maintenant que $\langle V,V\rangle = 0$. On a alors $\frac{a_i}{n_i}=\frac{a_j}{n_j}$ pour chaque $i\neq j$ tels que $\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle>0$. Nous affirmons que, pour chaque $i\neq j$ il existe une chaîne de composantes irréductibles $\gamma_i=\gamma_{i_0},\cdots,\gamma_{i_r}=\gamma_j$ telles que $\langle\gamma_{i_k},\gamma_{i_{k+1}}\rangle$ est >0. On en déduira donc que $\frac{a_i}{n_i}=\frac{a_j}{n_j}$ pour tout $i\neq j$ et ainsi que $V=\sum_i a_i\gamma_i = \frac{a_1}{n_1}\sum_i n_i\gamma_i = \frac{a_1}{n_1}f^*(G)$ comme annoncé. Pour vérifier l'affirmation, considérons η_G le point générique de G (qui est une variété irréductible) et la fibre $\mathcal{X}_{\eta_G} = f^{-1}(\eta_G)$. Celle-ci est une union de composantes irréductibles $X_1\cup\cdots\cup X_r$ et on voit aisément que les X_ν correspondent aux γ_ν : en fait γ_ν est la fermeture de Zariski de X_ν et $X_\nu=\gamma_\nu\cap\mathcal{X}_{\eta_G}$. En outre, comme f est plat, $\mathcal{X}_{\eta_G}$ est connexe, et en particulier pour chaque $\nu\neq\mu$ il existe une chaîne de composantes irréductibles $X_\nu=X_{\nu_0},\cdots,X_{\nu_r}=X_\mu$ telles que $X_{\nu_k}\cap X_{\nu_{k+1}}\neq\emptyset$. Donc $\gamma_{\nu_k}\cap\gamma_{\nu_{k+1}}\neq\emptyset$. Soient alors $H_1,\dots,H_{n-m-1}$ des représentants de h dans $\mathrm{Div}(\mathcal{X})$ en position suffisamment générale. Le morphisme $f:\gamma_{\nu_k}\cap\gamma_{\nu_{k+1}}\cap H_1\cap\cdots\cap H_{n-m-1}\to\mathcal{Y}$ (à valeurs dans G) est génériquement fini car au-dessus de η_G on trouve $X_{\nu_k}\cap X_{\nu_{k+1}}\cap H_1\cap\cdots\cap H_{n-m-1}$ qui est fini et non vide (pour des raisons de dimension). Ainsi, on trouve que $f_*(\gamma_{\nu_k}\cdot\gamma_{\nu_{k+1}}\cdot h^{n-m-1})>0$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

L'étude de la K/k-trace B de P_X est similaire à [9, §3]. L'application pullback induit un homomorphisme que nous notons $f^*:\mathrm{Pic}^0(\mathcal{Y})\to\mathrm{Pic}^0(\mathcal{X})$. L'inclusion de la fibre générique $\iota : X\to\mathcal{X}$ induit un homomorphisme "restriction à la fibre générique" $\iota^*:\mathrm{Pic}^0(\mathcal{X})\to\mathrm{Pic}^0(X)$ qui, par la définition de la K/k-trace, se factorise par un homomorphisme $b:\mathrm{Pic}^0(\mathcal{X})\to B$ tel que $\tau\circ b=\iota^*$.

Proposition 2.2. *(Cf.* [9, Proposition 3.4]*) Le groupe* $\ker(f^*)$ *est fini et est même trivial si f admet une section générique. La suite de variétés abéliennes*

$$0\to\mathrm{Pic}^0(\mathcal{Y})\to\mathrm{Pic}^0(\mathcal{X})\to B\to 0. \tag{2.2}$$

est exacte si f possède une section générique et exacte à des groupes finis près en général (ou encore après tensorisation par $\mathbb{Q}$). En particulier, $H^1(\mathcal{X})\cong H^1(\mathcal{Y})\oplus$

$H^1(B)$. A fortiori, pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, on a $a_\mathfrak{p}(\mathcal{X}) = a_\mathfrak{p}(\mathcal{Y}) + a_\mathfrak{p}(B)$.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que dans [9, Proposition 3.4], il s'agit seulement d'ajouter que d'après le Lemme 2.1, si V est un diviseur vertical algébriquement équivalent à 0, c'est une somme de fibres, c'est-à-dire qu'il est de la forme $f^*(D')$ avec $D' \in \mathrm{Pic}^0(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}$ ou encore il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mV \in f^* \mathrm{Pic}^0(\mathcal{Y})$. L'entier m est borné par les multiplicités des fibres et même on peut prendre $m = 1$, s'il y a une section générique (en effet cette dernière est alors définie sur le complémentaire d'un fermé de codimension au moins deux). L'isomorphisme $H^1(\mathcal{X}) \cong H^1(\mathcal{Y}) \oplus H^1(B)$ suit de [14, Corollary 4.19, p. 131]. $\square$

Nous passons maintenant à (la généralisation de) la formule de Shioda-Tate. Soit $\imath^* : \mathrm{Div}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Div}(X)$ l'application pullback des diviseurs induite par $\imath : X \to \mathcal{X}$. Soit maintenant $Z_1, \ldots, Z_r$ des diviseurs sur $X/\bar{k}(\mathcal{Y})$ dont les classes forment une base de $\mathrm{NS}(X/\bar{k}(\mathcal{Y})) \otimes \mathbb{Q}$ et soient $\bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_r$ les diviseurs sur $\mathcal{X}$ obtenus en prenant l'adhérence de Zariski de $Z_1, \cdots, Z_r$ (resp.), de sorte que $\imath^*(\bar{Z}_i) = Z_i$. Si $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$ on a donc $\imath^*(\mathrm{cl}(D))$ algébriquement équivalent à $n_1 Z_1 + \cdots + n_r Z_r$ (avec $n_i \in \mathbb{Q}$). On définit alors $\psi : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to P_X(\bar{k}(\mathcal{Y})) \otimes \mathbb{Q}$ par

$$\psi(\mathrm{cl}(D)) = \imath^* \left(D - (n_1 \bar{Z}_1 + \cdots + n_r \bar{Z}_r)\right).$$

On obtient alors d'après le Lemme 2.4 ci-dessous une suite exacte

$$0 \to \ker(\psi) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\psi} P_X(\bar{k}(\mathcal{Y})) \otimes \mathbb{Q} \to 0. \tag{2.3}$$

dont nous allons décrire le noyau.

Définition 2.3. Soit $\tilde{\mathcal{S}}$ (respectivement $\mathcal{S}$) le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ (respectivement de $\mathrm{NS}(\mathcal{X})$) engendré par les classes $\bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_r$ et des composantes des images inverses de diviseurs de $\mathcal{Y}$ par f. On notera respectivement $\tilde{\mathcal{S}}_\mathbb{Q}$ et $\mathcal{S}_\mathbb{Q}$ les espaces vectoriels obtenus par tensorisation par $\mathbb{Q}$.

Lemme 2.4. *(Cf.* [9, Lemme 3.8]*) L'application ψ est surjective et son noyau $\ker(\psi)$ est égal à $\tilde{\mathcal{S}}$. Une base de $\mathcal{S}_\mathbb{Q}$ est fournie par les classes de $\bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_r$, l'image réciproque par f d'une base de $\mathrm{NS}(\mathcal{Y})$ et par les composantes, sauf une, de chaque image réciproque $f^{-1}(G)$, pour G diviseur irréductible de $\mathcal{Y}$ tel que le nombre des composantes irréductibles de $f^{-1}(G)$ soit ≥ 2. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ les diviseurs irréductibles de $\mathcal{Y}$ tels que le nombre m_i des composantes de $f^{-1}(\Delta_i)$ soit ≥ 2. On a en particulier,*

$$\mathrm{rang}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{s}(m_i - 1) + \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{Y})) + \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(X/\bar{k}(\mathcal{Y}))).$$

Démonstration. Soit $z \in P_X$ tel que z représente la classe $\mathrm{cl}(E)$ d'un diviseur $E \in \mathrm{Div}(X)$. Soit $\overline{E}$ la clôture de Zariski de E dans $\mathcal{X}$. C'est un diviseur de Weil (donc de Cartier, puisque $\mathcal{X}$ est lisse) et il est immédiat qu'on a $\psi(\mathrm{cl}(\overline{E})) = z$. Ainsi ψ est bien surjective.

Il est clair que $\tilde{\mathcal{S}} \subset \ker(\psi)$. Supposons que $\mathrm{cl}(D) \in \ker(\psi)$. Alors, il existe une fonction $x \in (\bar{k}(\mathcal{Y}))(X)$ telle que $\mathrm{div}(x) = \imath^*(D - (n_1 \bar{Z}_1 + \cdots + n_r \bar{Z}_r))$. Soit $\tilde{x}$ une fonction rationnelle sur $\mathcal{X}$ telle que $\tilde{x}_{|X} = x$. En particulier, $\imath^*(\mathrm{div}(\tilde{x})) = \mathrm{div}(x)$. Il est clair que, au niveau des diviseurs, $\ker(\imath^*)$ est engendré par les classes des diviseurs irréductibles verticaux pour la fibration f. Donc $\mathrm{div}(\tilde{x}) - (D - (n_1 \bar{Z}_1 +$

$\cdots + n_r\bar{Z}_r))$ est une somme des composantes de ces fibres. On en tire bien que $\mathrm{cl}(D) \in \tilde{\mathcal{S}}$ et, par suite $\ker(\psi) = \tilde{\mathcal{S}}$.

Pour la dernière affirmation, il est clair que les classes de l'énoncé forment un système générateur car toutes les fibres sont algébriquement équivalentes. Le fait qu'elles soient indépendantes se vérifie en utilisant la théorie d'intersection et le Lemme 2.1. La formule donnant le rang de $\mathcal{S}$ est alors immédiate. □

Définition 2.5. Posons $\mathcal{F} := \mathrm{NS}_{\mathrm{ver}}(\mathcal{X})/f^*(\mathrm{NS}(\mathcal{Y}))$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}$.

Remarquons que, avec les notations du lemme précédent, on a $\mathrm{rang}(\mathcal{F}) = \sum_i (m_i - 1)$ et que, après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}$ nous avons un isomorphisme de $\mathbb{Q}[G_k]$-modules

$$\mathrm{NS}_{\mathrm{ver}}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathcal{F}_{\mathbb{Q}} \oplus (\mathrm{NS}(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}) \,.$$

Nous pouvons maintenant énoncer (comparer avec [20, Formula 1.4], [9, Proposition 3.9], [26, Theorem 4.5]) :

Proposition 2.6 (Formule de Shioda-Tate)**.** *Il existe un isomorphisme de* $\mathbb{Q}[G_k]$*-modules*

$$\begin{aligned}\mathrm{NS}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q} &\cong \left(\left(\frac{P_X(\bar{k}(\mathcal{Y}))}{\tau B(\bar{k})} \right) \otimes \mathbb{Q} \right) \oplus \mathcal{S}_{\mathbb{Q}} \\ &\cong \left(\left(\frac{P_X(\bar{k}(\mathcal{Y}))}{\tau B(\bar{k})} \right) \otimes \mathbb{Q} \right) \oplus (\mathrm{NS}(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}) \oplus \big(\mathrm{NS}(X/\bar{k}(\mathcal{Y})) \otimes \mathbb{Q}\big)\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)) &= \mathrm{rang}\left(\frac{P_X(k(\mathcal{Y}))}{\tau B(k)} \right) + \mathrm{rang}(\mathcal{S}^{G_k}) \\ &= \mathrm{rang}\left(\frac{P_X(k(\mathcal{Y}))}{\tau B(k)} \right) + \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{Y}/k)) + \mathrm{rang}(\mathcal{F}^{G_k}) + \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(X/k(\mathcal{Y}))).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Démonstration. Comme dans [9, Proposition 3.9] le résultat suit de (2.3), (2.2) et du Lemme 2.4. La dernière formule s'obtient en prenant les G_k-invariants et en observant que $\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{NS}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}^{G_k}$ et $\big(P_X(\bar{k}(\mathcal{Y}))/\tau B(\bar{k})\big)_{\mathbb{Q}}^{G_k} = (P_X(k(\mathcal{Y}))/\tau B(k))_{\mathbb{Q}}$. □

3. Décompte des points sur les corps finis

Tout comme dans Rosen-Silverman [20] et dans les travaux ultérieurs des auteurs [9] et [26], l'idée de la preuve du théorème principal est de compter le nombre des points rationnels de $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ de deux manières. La première consiste à employer la formule de Lefschetz pour $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$, la deuxième à compter le nombre des points dans chaque fibre $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}$ pour $y \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$ et calculer la somme.

Commençons par expliciter l'application de la formule de Lefschetz.

Lemme 3.1. *Soit* $\mathcal{X}$ *une variété projective lisse de dimension* n*, définie sur le corps de nombre* k*, soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* $\mathcal{O}_k$ *de bonne réduction et soit* $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$ *la réduction de* $\mathcal{X}$ *en* $\mathfrak{p}$ *définie sur le corps fini* $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ *de cardinal* $q_{\mathfrak{p}}$*, alors :*

$$\#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = q_{\mathfrak{p}}^n - a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})q_{\mathfrak{p}}^{n-1} + b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})q_{\mathfrak{p}}^{n-2} + O(q_{\mathfrak{p}}^{n-3/2}).$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de la *Formule de Lefschetz* qui, jointe à l'observation $\mathrm{Tr}(F_{\mathfrak{p}}|H^i(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^i(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}})$ de l'introduction, indique que

$$\#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \,\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^i(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}})$$

en tenant compte d'une part de l'Hypothèse de Riemann (Théorème de Deligne, [3, Théorème 1.6]) qui entraîne que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^i(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = O(q_{\mathfrak{p}}^{i/2})$ et, d'autre part, de la dualité de Poincaré qui donne $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^{2n-1}(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n-1}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^1(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n-1}a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^{2n-2}(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n-2}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^2(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n-2}b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})$. Enfin bien sûr on a l'égalité $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|H^{2n}(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n}$. □

Cependant nous aurons besoin de compter les points sur des fibres non irréductibles ou singulières; une première étape est donnée par les estimations de Lang-Weil. Nous appelons ici *ensemble algébrique* sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ un schéma projectif réduit sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$.

Lemme 3.2. *Soit δ un ensemble algébrique de dimension pure m défini sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ et soit $\delta = \delta_1 \cup \cdots \cup \delta_r$ sa décomposition en composantes irréductibles absolues telles que δ_i soit définie sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ pour $1 \leq i \leq s$ (et seulement pour ces valeurs). On a*

$$\#\delta_i(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = \begin{cases} q_{\mathfrak{p}}^m + O(q_{\mathfrak{p}}^{m-1/2}), & si\ 1 \leq i \leq s \\ O(q_{\mathfrak{p}}^{m-1}), & si\ s < i \leq r, \end{cases} \tag{3.1}$$

où les constantes implicites ne dépendent que de m et du degré $\deg(\delta)$ *de δ dans un plongement projectif.*

Par conséquent on obtient

$$\#\delta(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = sq_{\mathfrak{p}}^m + O(q_{\mathfrak{p}}^{m-1/2}). \tag{3.2}$$

Démonstration. Le premier cas de (3.1) découle d'une version affaiblie du Théorème de Lang-Weil [13, Theorem 1]. Le deuxième cas provient du fait que les points $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$-rationnels de δ_i, pour $i > s$, sont contenus dans l'intersection des composantes irréductibles conjuguées de δ_i par $G_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$. La formule (3.2) suit immédiatement de (3.1). □

Nous allons utiliser ce lemme pour estimer la contribution des fibres singulières de notre fibration. Notons Δ le lieu discriminant de la fibration $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, c'est-à-dire :

$$\Delta := \{y \in \mathcal{Y} \mid \mathcal{X}_y \text{ est singulier}\}.$$

Pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$, la fibration $\tilde{f}_{\mathfrak{p}} : \tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}} \to \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}$ est une fibration de variétés lisses et a pour lieu discriminant la réduction $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}$ de Δ modulo $\mathfrak{p}$. Notons $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{NS}_{\mathrm{ver}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}})/\tilde{f}_{\mathfrak{p}}^*(\mathrm{NS}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}))$, alors on a, pour presque tout $\mathfrak{p}$, l'égalité $\mathrm{Tr}(F_{\mathfrak{p}}|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}})$, ce qui permet le calcul suivant.

Proposition 3.3. *Pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, on a :*

$$\sum_{y \in \tilde{\Delta}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} \#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n-1}\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}|\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}}\right) + q_{\mathfrak{p}}^{n-m}\#\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) + O(q_{\mathfrak{p}}^{n-3/2}). \tag{3.3}$$

Démonstration. Posons $\mathcal{D} := f^{-1}(\Delta) = \mathcal{D}_1 \cup \ldots \mathcal{D}_u$ (où les $\mathcal{D}_i$ désignent les composantes irréductibles). Pour presque tout $\mathfrak{p}$ on a $\tilde{\mathcal{D}}_\mathfrak{p} = \tilde{f}_\mathfrak{p}^{-1}(\tilde{\Delta}_\mathfrak{p})$. Le membre de gauche de la formule (3.3) est égal à $\#\tilde{\mathcal{D}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$.

Observons que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} | \mathcal{F}^{I_\mathfrak{p}}) = \mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p} | \tilde{\mathcal{F}}_\mathfrak{p})$ est le nombre de générateurs de $\tilde{\mathcal{F}}_\mathfrak{p}$ définis sur $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$. Si s (resp. t) est le nombre de composantes de $\tilde{\mathcal{D}}_\mathfrak{p}$ (resp. de $\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}$) définies sur $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$, on a, d'après (3.2) du Lemme 3.2 :

$$\#\tilde{\mathcal{D}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) = sq_\mathfrak{p}^{n-1} + O(q_\mathfrak{p}^{n-3/2}) \text{ et } \#\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) = tq_\mathfrak{p}^{m-1} + O(q_\mathfrak{p}^{m-3/2}). \tag{3.4}$$

Il reste à observer que $s = t + \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} | \mathcal{F}^{I_\mathfrak{p}})$ pour en déduire la proposition (cf. (2.1)). □

Remarque 3.4. Dans les travaux antérieurs sur les fibrations en courbes (cf. [20], [26] et [9]), on déterminait la contribution du nombre des points rationnels dans chaque fibre singulière individuellement et on additionnait ensuite ces contributions. Dans les deux premiers articles cités, les fibres sont des courbes de genre arithmétique un, et l'estimation a été faite au cas par cas en utilisant l'algorithme de Tate (détaillé par exemple dans [23]). Dans le troisième article cité, les fibres sont des courbes de genre arithmétique g et (d'après une remarque du referee - dans une première approche on utilisait le travail de Artin-Winters [2] pour obtenir une expression avec un terme d'erreur de $O(q_\mathfrak{p}^{1/2})$) - on a déterminé le nombre de points rationnels des fibres singulières au moyen de la cohomologie ℓ-adique à support propre (cf. [9, Lemme 3.2]). Dans le cas présent, au lieu d'analyser chaque fibre, la proposition donne un contrôle de la somme totale des contributions du nombre des points rationnels des fibres singulières. Mais en employant la méthode de décompte, on peut démontrer la généralisation suivante de [26, Theorem 5.1].

Lemme 3.5. *Pour chaque $y \in \tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ soit m_y le nombre des composantes $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$-rationnelles de $\tilde{f}_\mathfrak{p}^{-1}(y)$, alors on a*

$$\sum_{y \in \tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} (m_y - 1) = q_\mathfrak{p}^{m-1} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \mid \mathcal{F}^{I_\mathfrak{p}}) + O(q_\mathfrak{p}^{m-3/2}).$$

Proof. Il suffit de combiner la formule de la proposition (3.3) avec l'égalité suivante fournie par le lemme (3.2)

$$\#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) = m_y q_\mathfrak{p}^{n-m} + O(q_\mathfrak{p}^{n-m-1/2})$$

En effet on en tire que

$$\sum_{y \in \tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} \#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) = q_\mathfrak{p}^{n-m} \#\tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) + q_\mathfrak{p}^{n-m} \sum_{y \in \tilde{\Delta}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} (m_y - 1) + O(q_\mathfrak{p}^{n-3/2})$$

et le lemme suit. □

4. Calculs de résidus

Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème suivant, dont le Théorème 1.2 est une conséquence immédiate.

Théorème 4.1. *Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une fibration de variétés projectives lisses, définies sur un corps de nombres k, alors la fonction*

$$\sum_{\mathfrak{p}\notin R} -\mathfrak{A}^*_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s} + \sum_{\mathfrak{p}\notin R} \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^{s+1}} - \sum_{\mathfrak{p}\notin R} b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^{s+1}} + \sum_{\mathfrak{p}\notin R} b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^{s+1}}, \tag{4.1}$$

qui est a priori analytique sur $\Re(s) > 1$, se prolonge analytiquement au demi-plan fermé $\Re(s) \geq 1$ hormis un pôle simple en $s = 1$, avec un résidu égal à :

$$\operatorname{rang}\left(\frac{P_X(K)}{\tau B(k)}\right) + \operatorname{rang}(\mathrm{NS}(X/K)) - \operatorname{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)) + \operatorname{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{Y}/k)). \tag{4.2}$$

Commençons par rappeler que si

$$L(s) := \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\, q_{\mathfrak{p}}^{-s}|V^{I_{\mathfrak{p}}})^{-1}$$

est une fonction L de poids w (i.e., les valeurs propres de $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ sont de modules $q_{\mathfrak{p}}^{w/2}$), alors

$$-\frac{L'(s)}{L(s)} = \frac{d}{ds}(\log L(s)) = \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\,|V^{I_{\mathfrak{p}}})\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s} + g(s)$$

avec $g(s)$ holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > (w + 1)/2$. Dans le cas où le groupe de Galois agit à travers un groupe fini, on dispose du théorème classique suivant.

Proposition 4.2 (Artin, Brauer)**.** [20, Proposition 1.5.1] *Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie avec une action continue de G_k, et soit $L(V, s)$ la fonction L d'Artin associée.*

1. *$L(V, s)$ a une continuation méromorphe à $\mathbb{C}$.*
2. *$L(V, s)$ est holomorphe sur la droite $\Re(s) = 1$ à l'exception éventuelle du point $s = 1$, où l'on a $\mathrm{ord}_{s=1}(L(V, s)) = -\dim(V^{G_k})$.*
3. *$L(V, s)$ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$.*

En particulier, en choisissant $V = \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}$, on obtient le comportement suivant :

$$\underset{s=1}{\mathrm{Rés}}\left(\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\,|\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}})\frac{\log q_{\mathfrak{p}}}{q_{\mathfrak{p}}^s}\right) = \operatorname{rang}(\mathcal{F}^{G_k}) \tag{4.3}$$

Démonstration du Théorème 4.1. La formule de Lefschetz (cf. Lemme 3.1) appliquée à $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ permet d'écrire que,

$$\#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = q_{\mathfrak{p}}^n - a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})q_{\mathfrak{p}}^{n-1} + b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})q_{\mathfrak{p}}^{n-2} + O(q_{\mathfrak{p}}^{n-3/2}), \tag{4.4}$$

$$\#\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = q_{\mathfrak{p}}^m - a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})q_{\mathfrak{p}}^{m-1} + b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})q_{\mathfrak{p}}^{m-2} + O(q_{\mathfrak{p}}^{m-3/2}). \tag{4.5}$$

La formule de Lefschetz (cf. Lemme 3.1) appliquée à $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}$ permet d'écrire que, pour $y \in (\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}} - \tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}})(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$, on a

$$\#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = q_{\mathfrak{p}}^{n-m} - a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})q_{\mathfrak{p}}^{n-m-1} + b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})q_{\mathfrak{p}}^{n-m-2} + O(q_{\mathfrak{p}}^{n-m-3/2}). \tag{4.6}$$

On peut donc écrire en invoquant (4.6) et la Proposition 3.3

$$
\begin{aligned}
\#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) &= \sum_{y\in(\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}-\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}})(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} \#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) + \sum_{y\in\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\ bbf_{\mathfrak{p}})} \#\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \\
&= \sum_{y\in(\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}-\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}})(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} (q_{\mathfrak{p}}^{n-m} - a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})q_{\mathfrak{p}}^{n-m-1} + b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})q_{\mathfrak{p}}^{n-m-2} \\
&+ O(q_{\mathfrak{p}}^{n-m-3/2})) + q_{\mathfrak{p}}^{n-1}\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\,|\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}}) + q_{\mathfrak{p}}^{n-m}\#\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) + O(q_{\mathfrak{p}}^{n-3/2}) \\
&= q_{\mathfrak{p}}^{n-m}\#\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) - q_{\mathfrak{p}}^{n-m-1}\left(\sum_{y\in\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) - \sum_{y\in\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})\right) \\
&+ q_{\mathfrak{p}}^{n-m-2}\left(\sum_{y\in\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) - \sum_{y\in\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})\right) + q_{\mathfrak{p}}^{n-1}\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\mid\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}}) \\
&+ O(q_{\mathfrak{p}}^{n-3/2}) = q_{\mathfrak{p}}^{n} - a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})q_{\mathfrak{p}}^{n-1} - \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})q_{\mathfrak{p}}^{n-1} + b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})q_{\mathfrak{p}}^{n-2} \\
&+ \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})q_{\mathfrak{p}}^{n-2} + q_{\mathfrak{p}}^{n-1}\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\mid\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}}) + O(q_{\mathfrak{p}}^{n-3/2}).
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la définition des $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})$ et $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})$ ainsi que les estimations

$$
\sum_{y\in\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) = O(q_{\mathfrak{p}}^{m-1/2}) \text{ et } \sum_{y\in\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}) = O(q_{\mathfrak{p}}^{m}) \tag{4.8}
$$

pour faire rentrer ces deux termes dans le terme reste. Pour obtenir les estimations de (4.8) on a employé un résultat dû à Deligne [4, Theorem 3.3.1] qui dit que les valeurs propres de $F_{\mathfrak{p}}$ agissant sur $H_c^1(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$ (resp. $H_c^2(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$) sont de valeur absolue au plus $q_{\mathfrak{p}}^{1/2}$ (resp. $q_{\mathfrak{p}}$). Finalement on emploie les estimations de Lang et Weil (cf. Lemme 3.2) pour conclure (4.8).

En invoquant la définition des $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X})$, l'égalité $a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) = a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y}) + a_{\mathfrak{p}}(B)$ (voir la Proposition 2.2) et (4.4), on déduit de l'égalité (4.7) (divisée par $q_{\mathfrak{p}}^{n-1}$) que

$$
-\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) + \frac{\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})}{q_{\mathfrak{p}}} - \frac{b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})}{q_{\mathfrak{p}}} + \frac{b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})}{q_{\mathfrak{p}}} = -\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\mid\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{p}}}) + O(q_{\mathfrak{p}}^{-1/2}). \tag{4.9}
$$

D'après la Proposition 4.2 et en particulier (4.3), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Rés}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin R}\left(-\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) + \frac{\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})}{q_{\mathfrak{p}}} - \frac{b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})}{q_{\mathfrak{p}}} + \frac{b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{Y})}{q_{\mathfrak{p}}}\right)\frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s}\right) \\
&= -\operatorname{rang}\left(\mathcal{F}^{G_k}\right) = \operatorname{rang}\left(\frac{P_X(K)}{\tau B(k)}\right) + \operatorname{rang}\left(\mathrm{NS}(X/K)\right) \\
&- \operatorname{rang}\left(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)\right) + \operatorname{rang}\left(\mathrm{NS}(\mathcal{Y}/k)\right),
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

où la dernière égalité suit de la formule de Shioda-Tate (Proposition 2.6). Ce qui achève la preuve du Théorème 4.1. □

5. Illustrations

On peut facilement obtenir des exemples de fibrations grâce à la proposition classique suivante.

Proposition 5.1. *Soit $\mathcal{X}$ une variété lisse et projective de dimension n, définie sur un corps infini k. Quitte à remplacer $\mathcal{X}$ par son éclatement $\mathcal{X}'$ le long d'une sous-variété lisse de dimension $n-m-1$, il existe une fibration en variétés de dimension $n-m$, disons $f : \mathcal{X}' \to \mathbb{P}^m$, également définie sur k.*

Démonstration. (Cf [9, Proposition 5.1] pour le cas d'une fibration en courbes). Choisissons $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^n$ un morphisme fini (par exemple obtenu par normalisation de Noether, i.e., par un plongement dans un $\mathbb{P}^N$ suivi d'une projection linéaire) et choisissons une sous-variété linéaire générale L définie sur k, de dimension $n-m-1$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors $\phi^{-1}(L)$ est lisse (et même connexe si $n-m>1$). Notons $\mathbb{P}'$ l'éclaté de $\mathbb{P}^n$ au-dessus de L et par $\pi' : \mathbb{P}' \to \mathbb{P}^m$ la fibration en espaces projectifs de dimension $n-m$ qui s'en déduit. Soit $\pi : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ l'éclatement de $\mathcal{X}$ au-dessus de $\phi^{-1}(L)$, on a donc un morphisme fini $\phi' : \mathcal{X}' \to \mathbb{P}'$ qui, composé avec π', fournit la fibration cherchée $f := \phi' \circ \pi' : \mathcal{X}' \to \mathbb{P}^m$ en variétés de dimension $n-m$. □

Pour toute variété projective lisse définie sur un corps de nombres k, dénotons $H^2(\mathcal{X})(1) := H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X} \times_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell(1))$. Soit $\mathrm{cl}_\ell : \mathrm{NS}(\mathcal{X}) \to H^2(\mathcal{X})(1)$ l'application de classes de diviseurs.

La proposition suivante montre que la Conjecture T est invariante par une application k-birationnelle qui est composée d'un nombre fini d'éclatements.

Proposition 5.2. *Soit $\phi : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ une application k-birationnelle entre deux variétés lisses et projectives de dimension n définies sur un corps de nombres k. Soit $\phi' : \mathcal{X}' \times_k \overline{k} \to \mathcal{X} \times_k \overline{k}$ l'application $\overline{k}$-birationnelle déduite de ϕ par extension de scalaires. Supposons que ϕ' soit composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses. Donc, la Conjecture T est vraie pour $\mathcal{X}'/k$ si et seulement si elle est vraie pour $\mathcal{X}/k$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X} \times_k \overline{k} = \mathcal{X}_0 \xleftarrow{\phi_1} \mathcal{X}_1 \xleftarrow{\phi_2} \cdots \xleftarrow{\phi_{r-1}} \mathcal{X}_{r-1} \xleftarrow{\phi_r} \mathcal{X}_r = \mathcal{X}' \times_k \overline{k}$ la factorisation de ϕ', où les applications ϕ_i sont des éclatements de centres lisses. Chacune de ces transformations rajoute un diviseur exceptionnel E_i au groupe de Néron-Severi et au groupe de cohomologie, c'est-à-dire, soit $\{E_i\}$ la classe de E_i dans $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_i)$, donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{NS}(\mathcal{X}_i) \cong \phi_i^*(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{i-1})) \oplus \mathbb{Z}[\{E_i\}] \text{ et} \\ &\qquad\qquad H^2(\mathcal{X}_i)(1) \cong \phi_i^*(H^2(\mathcal{X}_{i-1})(1)) \oplus \mathbb{Q}_\ell(1)[\mathrm{cl}_\ell(\{E_i\})].\end{aligned}$$

Globalement on obtient donc, en notant par V le groupe des classes de diviseurs engendré par les diviseurs exceptionnels sur $\mathcal{X}' \times_k \overline{k}$, et remarquant que la restriction de cl_ℓ à $V \otimes \mathbb{Q}_\ell$ donne un isomorphisme sur son image $\mathcal{V}$,

$$\mathrm{NS}(\mathcal{X}') \cong \phi'^*(\mathrm{NS}(\mathcal{X})) \oplus V \text{ et } H^2(\mathcal{X}')(1) \cong \phi'^*(H^2(\mathcal{X})(1)) \oplus (V \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

Le quotient

$$\frac{L_2(\mathcal{X}'/k, s)}{L_2(\mathcal{X}/k, s)} = \frac{L(H^2(\mathcal{X}')(1), s-1)}{L(H^2(\mathcal{X})(1), s-1)} = L(V, s-1)$$

est donc une fonction L d'Artin dont l'ordre en $s=2$ (cf. Proposition 4.2) est égal à

$$\begin{aligned}-\operatorname*{ord}_{s=2}(L(V, s-1)) &= \dim((V \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{G_k}) \\ &= \dim(H^2(\mathcal{X}')(1)^{G_k}) - \dim(H^2(\mathcal{X})(1)^{G_k}).\end{aligned} \tag{5.1}$$

D'autre part on a bien

$$\text{rang}(\text{NS}(\mathcal{X}'/k)) - \text{rang}(\text{NS}(\mathcal{X}/k)) = \dim((V \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{G_k})$$

d'où le résultat. □

Remarque 5.3. Au contraire du cas des surfaces, on ne peut pas dire qu'une application $\overline{k}$-birationnelle entre variétés projectives et lisses de dimension $n \geq 3$ sur $\overline{k}$ soit composée par un nombre fini d'éclatements. Cependant, le (profond) Théorème de Factorisation Faible (cf. [27] et [1]) affirme que, avec les notations ci-dessus, si $\phi' : \mathcal{X}' \times_k \overline{k} \to \mathcal{X} \times_k \overline{k}$ est une application $\overline{k}$-birationnelle, il existe une factorisation de ϕ', $\mathcal{X} \times_k \overline{k} = \mathcal{X}_0 \overset{\phi_1}{\longleftarrow} \mathcal{X}_1 \overset{\phi_2}{\longleftarrow} \cdots \overset{\phi_{r-1}}{\longleftarrow} \mathcal{X}_{r-1} \overset{\phi_r}{\longleftarrow} \mathcal{X}_r = \mathcal{X}' \times_k \overline{k}$, où chaque ϕ_i est un éclatement ou une contraction de centre lisse. Le cas de la factorisation forte, d'où découlerait la Proposition 5.2, reste encore un problème ouvert.

Remarque 5.4. La Conjecture T est en effet conséquence de deux conjectures (qui sont prouvées dans tous les cas où la validité de cette conjecture est connue, cf. [19], [20]):

- (**Conjecture de Tate I**) *On a un isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels*

$$\text{NS}(\mathcal{X}/k) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong H^2(\mathcal{X})(1)^{G_k} \tag{5.2}$$

- (**Conjecture de Tate II**) *On a l'égalité*

$$-\operatorname*{ord}_{s=2}(L_2(\mathcal{X}/k, s)) = \dim(H^2(\mathcal{X})(1)^{G_k}). \tag{5.3}$$

Remarque 5.5. Lorsque les classes de diviseurs engendrent $H^2(\mathcal{X})(1)$, alors la Conjecture T est vraie pour $\mathcal{X}$ (la Conjecture I est triviale et la Conjecture II découle de la Proposition 4.2). En particulier la Conjecture T est vraie pour $\mathbb{P}^n$ et pour toute variété birationnelle à $\mathbb{P}^n$.

Nous terminerons cette section en notant des conséquences du Théorème 1.2 analogues à celles données dans [9]. Dans le reste de cette section, aussi bien que dans la prochaine, dire que les Conjectures T_{fin}, M_{an} et BSD_{fin} sont vraies pour les fibrations en variétés veut dire que ces conjectures sont vraies pour toute d-fibration pour tout $d \geq 1$ entier.

Théorème 5.6. *Les Conjectures suivantes sont équivalentes:*

(a) *La Conjecture T.*
(b) *La Conjecture M_{an} pour les fibrations en variétés.*
(c) *La Conjecture N_{an} pour les fibrations en courbes.*
(d) *La Conjecture M_{an} pour les fibrations en variétés au dessus d'un espace projectif.*
(e) *La Conjecture N_{an} pour les fibrations en courbes au dessus d'un espace projectif.*

Démonstration. Nous démontrerons que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow e) \Rightarrow a)$. Le théorème en découle, puisqu'il est facile à voir que $b) \Rightarrow d) \Rightarrow e)$.

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une d-fibration en variétés telle que f, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ soient définis sur k avec $\dim(\mathcal{X}) = n$, $\dim(\mathcal{Y}) = m$ et $d = n - m > 0$. Par le Théorème 1.2, la validité de la Conjecture T pour $\mathcal{X}/k$ et $\mathcal{Y}/k$ entraîne la Conjecture M_{an} pour f.

Il est trivial que la Conjecture M_{an} pour les fibrations en variétés implique la Conjecture M_{an} pour les fibrations en courbes. Comme nous l'avons déjà observé dans Remarque 1.4, la Conjecture $\mathrm{M_{an}}$ pour les fibrations en courbes est équivalente à la Conjecture $\mathrm{N_{an}}$ pour les fibrations en courbes. En outre, il est clair que la Conjecture $\mathrm{N_{an}}$ pour les fibrations en courbes au dessus d'une variété quelconque implique la Conjecture $\mathrm{N_{an}}$ pour les fibrations en courbes au dessus d'un espace projectif.

Supposons maintenant vraie la Conjecture $\mathrm{N_{an}}$ pour les fibrations en courbes au dessus d'un espace projectif. Soit $\mathcal{X}/k$ une variété lisse projective de dimension n. Par la Proposition 5.1 (où bien [9, Proposition 5.1]), $\mathcal{X}$ est k-birationnellement équivalente à une variété $\mathcal{X}'$ qui se fibre en courbes sur $\mathbb{P}^{n-1}$. Par la Remarque 5.5, la conjecture de Tate est vraie pour $\mathbb{P}^{n-1}$, et il suit du Théorème 1.2 que la conjecture de Tate est vraie pour $\mathcal{X}'$, donc, par la Proposition 5.2, elle est aussi vraie pour $\mathcal{X}$. $\square$

Remarque 5.7. Dans la démonstration du Théorème 5.6, il suffit d'utiliser [9, Proposition 5.1] pour obtenir une fibration en courbes, parce que la preuve que la Conjecture $\mathrm{M_{an}}$ pour les fibrations en variétés implique la Conjecture T est indirecte (à travers la Conecture $\mathrm{N_{an}}$ pour les fibrations en courbes); mais en utilisant la Proposition 5.1 on pourrait démontrer directement l'équivalence entre la Conjecture T et la Conjecture $\mathrm{M_{an}}$.

6. Les rapports entre les Conjectures $\mathrm{T_{FIN}}$, $\mathrm{N_{AN}}$ et $\mathrm{BSD_{FIN}}$ pour les fibrations en variétés

Proposition 6.1. *La Conjecture T_{fin} pour les fibrations en variétés entraîne la Conjecture T.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}/k$ une variété projective lisse de dimension n définie sur corps de nombres k, $m \geq 1$ un nombre entier, et $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times \mathbb{P}^m$. Soit $p_1 : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ la projection sur le premier facteur, et $f : \mathcal{X}' \to \mathbb{P}^m$ la n-fibration égale à la projection sur le deuxième facteur. Allors f est une fibration constante, où toutes les fibres sont égales à $\mathcal{X}$. Dénotons $\mathbb{P}^m$ par $\mathcal{Y}$. Donc, pour tout $\mathfrak{p} \notin R$ et $y \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$ on a

$$b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}'_{\mathfrak{p},y}) = b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Tr}(F_{\mathfrak{p}} \mid H^2(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} \mid H^2(\mathcal{X})^{I_{\mathfrak{p}}}) = b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}).$$

D'où,

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}') = \frac{1}{q_{\mathfrak{p}}^m} \sum_{y \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})} b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}'_{\mathfrak{p},y}) = \left(1 + \frac{1}{q_{\mathfrak{p}}} + \ldots + \frac{1}{q_{\mathfrak{p}}^m}\right) b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}).$$

Le calcul des résidus nous donne

$$\operatorname*{R\acute{e}s}_{s=2} \left(\sum_{\mathfrak{p} \notin R} \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}') \frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s} \right) = \operatorname*{R\acute{e}s}_{s=2} \left(\sum_{\mathfrak{p} \notin R} b_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) \frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s} \right). \tag{6.1}$$

Soit $k(\underline{t}) := k(t_1, \cdots, t_m)$ le corps de fonctions de $\mathbb{P}^m_k$ et $\mathcal{X}'_\eta/k(\underline{t})$ la fibre générique de f. Le résultat est donc équivalent à prouver

$$\mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}'_\eta/k(\underline{t}))) = \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)). \tag{6.2}$$

Mais $\mathcal{X}'_\eta \cong \mathcal{X} \times_k k(\underline{t})$, donc $\mathrm{NS}(\mathcal{X}'_\eta/k(\underline{t})) \cong \mathrm{NS}(\mathcal{X}/k)$, d'où l'égalité entre les rangs suit. $\square$

Théorème 6.2. *Les Conjectures N_{an} et T_{fin} pour les fibrations en variétés sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons que la Conjecture $\mathrm{T}_{\mathrm{fin}}$ soit vraie pour les fibrations en variétés. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une fibration en variétés définie sur un corps de nombres k. Par la Proposition 6.1, la Conjecture T est vraie pour $\mathcal{X}/k$ et pour $\mathcal{Y}/k$. Ainsi, par le Corollaire 1.3, la Conjecture N_{an} est vraie pour f.

Réciproquement, supposons que la Conjecture N_{an} soit vraie pour les fibrations en variétés, a fortiori elle est vraie pour les fibrations en courbes. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une fibration en variétés. Par le Théorème 5.6, la Conjecture T est vraie pour $\mathcal{X}/k$ et $\mathcal{Y}/k$. Encore une fois, on conclut par le Corollaire 1.3 que la Conjecture $\mathrm{T}_{\mathrm{fin}}$ est vraie pour f. □

Proposition 6.3. *La Conjecture BSD_{fin} pour les fibrations en variétés entraîne la Conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer pour les variétés abéliennes sur un corps de nombres.*

Démonstration. Soit k un corps de nombres, A/k une variété abélienne de dimension d, $m \geq 1$ un nombre entier, $\mathcal{A} = A \times \mathbb{P}^m$ et $f : \mathcal{A} \to \mathbb{P}^m$ la d-fibration constante obtenue par la projection dans la deuxième composante. Soit $k(\underline{t}) := k(t_1, \cdots, t_m)$ le corps de fonctions de $\mathbb{P}^m_k$. Par construction, la $k(\underline{t})/k$-trace de la fibre générique $\mathcal{A}_\eta/k(\underline{t})$ de f est égale à A. De plus, comme $\mathcal{A}_\eta \cong A \times_k k(\underline{t})$, on a $\mathcal{A}_\eta(k(\underline{t})) \cong A(k(\underline{t})) = A(k)$. Alors,

$$\mathrm{rang}(\mathcal{A}_\eta(k(t))) = \mathrm{rang}(A(k)). \tag{6.3}$$

Dénotons $\mathbb{P}^m$ par $\mathcal{Y}$. Pour tout $\mathfrak{p} \notin R$ et $y \in \tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ on a

$$a_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathfrak{p},y}) = a_\mathfrak{p}(\tilde{A}_\mathfrak{p}) = \mathrm{Tr}(F_\mathfrak{p} \mid H^1(\tilde{A}_\mathfrak{p})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \mid H^1(A)^{I_\mathfrak{p}}) = a_\mathfrak{p}(A).$$

D'où,

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = \frac{1}{q_\mathfrak{p}^m} \sum_{y \in \tilde{\mathcal{Y}}_\mathfrak{p}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})} a_\mathfrak{p}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathfrak{p},y}) = \left(1 + \frac{1}{q_\mathfrak{p}} + \ldots + \frac{1}{q_\mathfrak{p}^m}\right) a_\mathfrak{p}(A).$$

Le calcul de résidus donne

$$\operatorname*{Rés}_{s=1} \left(\sum_{\mathfrak{p} \notin R} -\mathfrak{A}_\mathfrak{p}(\mathcal{A}) \frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s} \right) = \operatorname*{Rés}_{s=1} \left(\sum_{\mathfrak{p} \notin R} -a_\mathfrak{p}(A) \frac{\log(q_\mathfrak{p})}{q_\mathfrak{p}^s} \right).$$

Le résultat se déduit de cette égalité, de (6.3) et de (1.11). □

Proposition 6.4. *La Conjecture BSD_{fin} pour les fibrations en variétés entraîne la Conjecture N_{an} pour les fibrations en variétés.*

Démonstration. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une fibration en variétés, $P_{\mathcal{X}_\eta}$ la variété de Picard de la fibre générique $\mathcal{X}_\eta/k(\mathcal{Y})$ de f et (τ, B) sa $k(\mathcal{Y})/k$-trace. Par hypothèse, la Conjecture $\mathrm{BSD}_{\mathrm{fin}}$ est vraie pour les fibrations en variétés, donc par la Proposition 6.3, la Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vraie pour B/k. Notons enfin que la validité de la conjecture N_{an} pour f est une conséquence de la Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour B/k et de la Conjecture $\mathrm{BSD}_{\mathrm{fin}}$ pour f. □

Théorème 6.5. *La Conjecture BSD_{fin} pour les fibrations en variétés entraîne la Conjecture T_{fin} pour les fibrations en variétés.*

Démonstration. Le théorème suit immédiatement du Théorème 6.2 et de la Proposition 6.4. □

Références

[1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Wlodarczyk, *Torification and factorization of birational maps*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 531-572.

[2] M. Artin, G. Winters, *Degenerate fibers and reduction of curves*, Topology **10** (1971), 373-383.

[3] P. Deligne, *Conjectures de Weil I*, Pub. Math. IHES **43** (1974), 273-307.

[4] P. Deligne, *Conjectures de Weil II*, Pub. Math. IHES **52** (1981), 313-428.

[5] G. Faltings, *Endlichekeitsätze für abelsche Varietäten übes Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349-366.

[6] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.

[7] A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique II*, Pub Math. IHES 8 (1961), 5-222.

[8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Spinger Verlag, 1977.

[9] M. Hindry, A. Pacheco, *Sur le rang des Jacobiennes sur un corps des fonctions*, Preprint, `http://arXiv.org/abs/math.NT/0302184`, 2003; à paraître dans le Bulletin de la Société Mathématique de France.

[10] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[11] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, 1983.

[12] S. Lang, *Abelian varieties*, Interscience, 1959.

[13] S. Lang, A. Weil, *Number of rational points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819-827.

[14] J. S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton,1980.

[15] J. S. Milne, *Abelian varieties*, in *Arithmetic Geometry*, eds. G. Cornell, J. Silverman, 103-150, Springer-Verlag 1986.

[16] K. Nagao, *Construction of high-rank elliptic curves*, Kobe J. Math. **11** (1994), 211-219.

[17] K. Nagao, $\mathbb{Q}(T)$*-rank of elliptic curves and certain limits coming from local points*, Manuscripta Math. **92** (1997), 13-32.

[18] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, 1992, (Eng. translation: *Algebraic Number Theory*,1999)

[19] D. Ramakrishnan, *Regulators, algebraic cycles and values of L-functions*, in *Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory*, A.M.S., Contemp. Math.

[20] M. Rosen, J. Silverman, *On the rank of an elliptic surface*, Inventiones Math. **133** (1998), 43-67.

[21] S. S. Shatz, *Profinite Groups, Arithmetic, and Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[22] J. Silverman, *The rank of elliptic surfaces in unramified abelian towers over number fields*, Preprint 2003, `http://arXiv.org/abs/math.NT/0305028`

[23] J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics, vol.151, 1994.

[24] J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta-functions*, Arithmetical Algebraic Geometry, Harper and Row, New York, 93-110 (1965) .

[25] J. Tate, Séminaire Bourbaki, exposé 306, 1966, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, [volume 9, pages 415-440,Soc. Math. France, 1995].

[26] R. Wazir, *Arithmetic on elliptic threefolds*, PhD thesis, Brown University, 2001; à paraître dans Compositio Mathematica.

[27] J. Włodarczyk, *Toroidal varieties and the weak factorization theorem*, Inventiones Math. **154** (2003), 223-331.

[28] S. Wong, *On the Néron-Severi group of fibered varieties*, Preprint, `http://arXiv.org/abs/math.NT/0104200`, 2001; à paraître dans J. Reine und Angew. Math.

Université Denis Diderot Paris VII, U.F.R. Mathématiques, case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris, France

E-mail address: `hindry@math.jussieu.fr`

Universidade Federal do Rio de Janeiro (Universidade do Brasil), Departamento de Matemática Pura, Rua Guaiaquil 83, Cachambi, 20785-050 Rio de Janeiro, RJ, Brasil
E-mail address: amilcar@impa.br

Università degli Studi di Torino, Dipartimento di Matematica, via Carlo Alberto, 10, 10123 Torino, Italia
E-mail address: wazir@dm.unito.it